Вот я тут перед вами распинаюсь на тему барионов.
Разумеется, я перед этим прочитал кучу всяких источников от  теоретиков. И вот как они объясняют барионы:

а) У SU3 есть представления размерности 1, 8, 10;
б) Упорядоченное декартово произведение двух спиноров размерности 3 раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений:
3x3x3=1+8+8+10

Давайте разбираться. Начнём с первого утверждения.

У одной и той же группы может быть несколько представлений. Ну вот та же SU2, она же SO3. Есть спинорное:

$$\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} = \text{матрица 2x2} * \begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$$

Есть привычное нам из SO3 с вещественной матрицей:

$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \text{матрица 3x3} * \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

А как вам такое?

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i\sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3/2} & 0 & -i\sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3/2} & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

с пятью базисными векторами

$$|1+2\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad |1+1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad |10\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad |1-1\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad |1-2\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

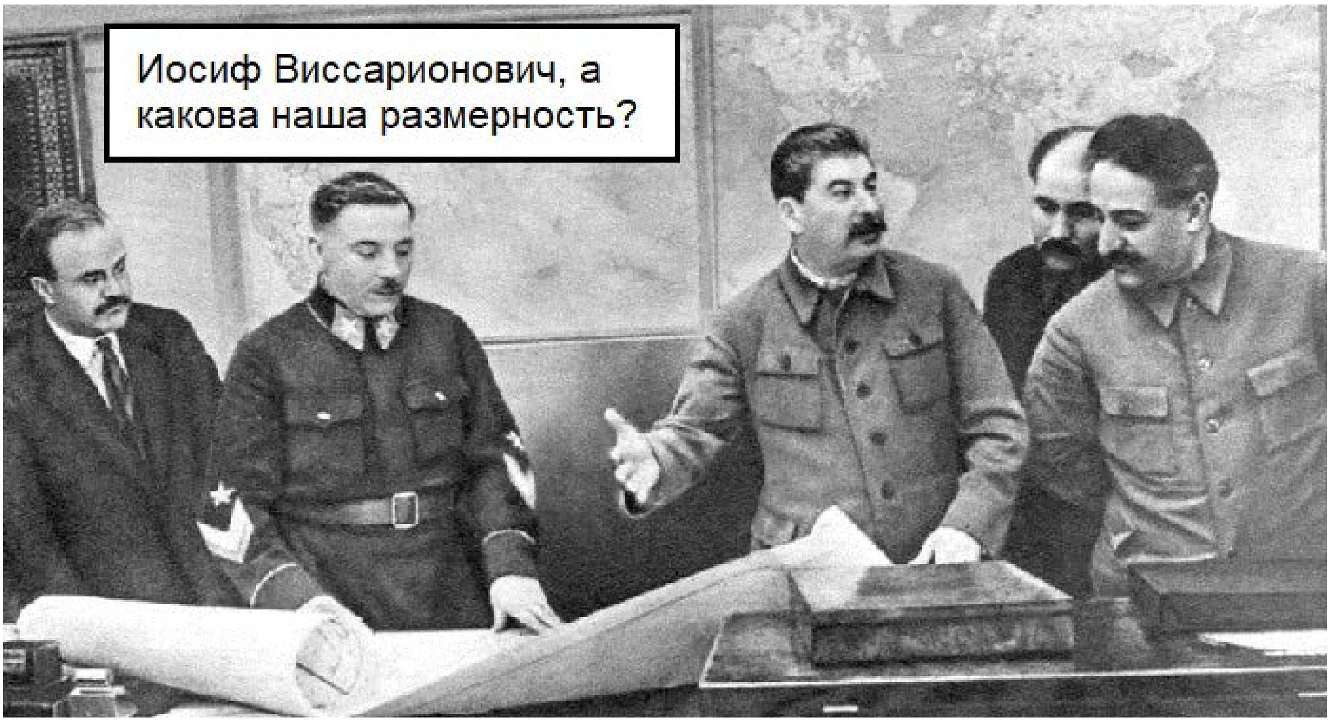
Размерность группы – это число действительных чисел, необходимое для взаимно однозначного задания элемента группы.
Размерность представления – это число действительных чисел, необходимое для взаимно однозначного задания генератора у себя в своём линейном пространстве.

Размерность группы SU2 три. ТРИ И ТОЛЬКО ТРИ!
А вот представления мы подстроили несколько:
Представлением с размерностью 2
Представлением с размерностью 3
Представлением с размерностью 5
и можно строить ещё  и ещё.
Т.е. размерность группы != размерности представления.

По определениям

Размерность группы – это число действительных чисел, необходимое для взаимно однозначного задания элемента группы.
Размерность представления – это число действительных чисел, необходимое для взаимно однозначного задания генератора у себя в своём линейном пространстве.

это два разных уровня:





И действительно, группе совершенно пое… всё равно, какие там внутренности у генераторов. Ей главное – выражать через генераторы-генералы свои элементы

$$\text{Поворот на углы } \theta_i = \prod_{i=1}^{3} \exp(\theta_i \widehat{X}_i)$$

И важно знать коммутационные соотношения между генеторами-генералами (алгебру):

$$[J_i, J_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} J_k$$

То, являются ли генералы-генераторы матрицами, комплексными числами или кватернионами – это уже забота «размерности представления».

***Вы знаете, что такое представление группы? Сейчас я вам докажу, что вы не знаете.***
Задач по теории групп крайне мало; поэтому для понимания полезно разбирать парадоксы. Разберём один из таких.

Мы уже говорили про понятие «размерность группы». Согласитесь, для любого множества важно понимать его размерность.

Вроде мы уже определились, что размерность SU2 (как и SO3) – 3, SU3 – 8.
Но подождите: любой поворот в действительном трёхмерии (т.е. SO3) можно описать двумя числами – θ и φ! Чуть более формально: любому повороту можно сопоставить вектор длины 1, тогда поворот задаётся как поворот от исходного вектора (скажем, вдоль оси z) к вектору (θ, φ). Получаем, что SO3 имеет размерность 3, а не 2…

А для SU3 достаточно знать 6 действительных чисел (потому что повороту можно аналогично сопоставить столбец $\begin{matrix} u \\ d \\ s \end{matrix}$, в нём 3 комплексных числа, а каждое комплексное число – 2 действительных), одно съедает условие нормировки, остаётся 5. 5, а не 8. WTF?

Интересное противоречие, согласитесь!
Теоретики, которых я поспрашивал (причём это были действительно умные ребята), дали неверный ответ – мол, я перепутал понятия «размерность группы» и «размерность представления». Как раз нет: казалось бы, 2 – число действительных чисел, необходимо для взаимно однозначного определения элемента ГРУППЫ, а не генератора. Так что речь именно о представлении группы.

Мы разобрались, почему теоретики неправы. Так почему 3, а не 2, и 8, а не 5?

Проблема в том, что когда мы сопоставляли поворот радиус-вектору, мы не учли, что он «бесконечно тонок» и его нет смысла. Представим, что мы вылепили его из пластилина неидеально симметричным – тогда у нас появляется третья степень свободы, связанная со вращением вокруг собственной оси.

Потому что у групп (которые, я напомню, n-мерные сферы в $R^{N+1}$) своя форма представления своих элементов:

$$\text{Поворот на углы } \theta_i = \prod_{i=1}^{3} \exp(\theta_i \widehat{X}_i)$$

Так, так и только так! Никаких там «сначала на θ, потом на φ».


Мысль равенства (т.к. мы установили  взаимно однозначное соответствие!) $R^3$ и $R^2$, $R^8$ и $R^5$ может показаться дикой. Но на самом деле все $R^n$ континуальны  и равны между собой (есть доказательство со впихиванием цифр в десятичную дробь, полагаю, что оно известно читателю).